Trigonometrik denklemler

1) $\sin x = \sin\alpha$, $\sin x = -\sin\alpha$ denklemlerinin çözümü

$\sin x = \sin\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya $x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\sin x = -\sin\alpha \iff x = -\alpha + 2k\pi\ k\in\mathbb{Z}$ veya $x = \pi + \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Örnek: $\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x\in\mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

Örnek: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya

$x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

43

$ÇK = \{x\in\mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

Örnek: $\sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$3x = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

veya

$3x = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 5x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$Ç.K = \{x\in\mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

2) $\cos x = \cos\alpha$, $\cos x = -\cos\alpha$ denkleminin çözümü

$\cos x = \cos\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya $x = -\alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos x = -\cos\alpha \iff x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya $x = \pi + \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Örnek: $\cos x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\cos 0 \Rightarrow x = \pi - 0 + 2k\pi \text{ veya } x = \pi + 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Örnek: $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \quad \text{veya} \quad \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad \cos x = 2$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan $\cos x = 2$ olması mümkün değildir.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

45

Uyarı: $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ yerine
$$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
de yazılabilir.

Örnek: $\cos 2x = \sin\frac{3\pi}{8}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ olduğundan $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{8} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \text{ veya } 2x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{16} + k\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{16} + k\pi = \pi - \frac{\pi}{16} + k\pi = \frac{15\pi}{16} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{16} + k\pi \text{ veya } x = \frac{15\pi}{16} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Örnek: $2\cos 2x + \sin x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ olduğu göz önüne alınırsa

$$2(1 - 2\sin^2 x) + \sin x + 3 = 0 \Rightarrow 4\sin^2 x - \sin x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (4\sin x - 5)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{5}{4} \text{ veya } \sin x = -1$$

$\sin x = \frac{5}{4} \geq 1$ mümkün değil.

$\sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ veya $x = \frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ veya $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3) $\tan x = \tan\alpha$, $\cot x = \cot\alpha$ denklemlerinin çözümü

$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Örnek: $\tan x = \cot x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\tan x = \cot x \Rightarrow \tan x = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Örnek: $(\tan 2x)\cot(3x - \frac{\pi}{3}) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\tan x \cot x = 1$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ yazabiliriz. O halde $\cot(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\tan(3x - \frac{\pi}{3})}$ yazarsak, verilen denklem

$$\frac{\tan 2x}{\tan(3x - \frac{\pi}{3})} = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan(3x - \frac{\pi}{3})$$

halini alır.

$\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + k\pi\}$.

4) $\tan x = -\tan\alpha$, $\cot x = -\cot\alpha$ denklemlerinin çözümü

$$\tan x = -\tan\alpha \Rightarrow x = \pi - \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = -\cot\alpha \Rightarrow x = \pi - \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Örnek: $\tan 4x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\tan 4x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 4x = -\tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow 4x = \pi - \frac{\pi}{6} + k\pi = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5) $a\cos x + b\sin x = c$ denkleminin çözümü

Eşitliğin her iki tarafı a ile bölünerek $\cos x$ in katsayısı 1 yapılır. $\sin x$ in katsayısı olarak bulunan $\frac{b}{a}$ yerine $\tan\alpha$ yazılarak denklem çözülür.

Örnek: $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = \sqrt{6}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\cos x + \frac{3}{\sqrt{3}}\sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$$

$\sqrt{3}$ yerine $\tan\frac{\pi}{3}$ yazılırsa

$$\cos x + \tan\frac{\pi}{3}\sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x}_{\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \text{ veya } \ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ \text{ veya } \ x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ \text{ veya } \ x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Örnek: $\tan x + \cot x - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\underset{(\sin x)}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cancel{2}\cdot\frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}} = \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

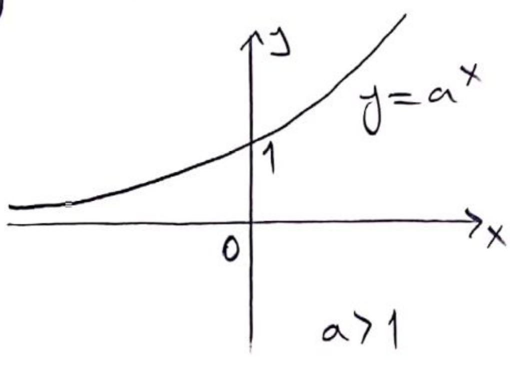
$$\Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } 2x = \underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

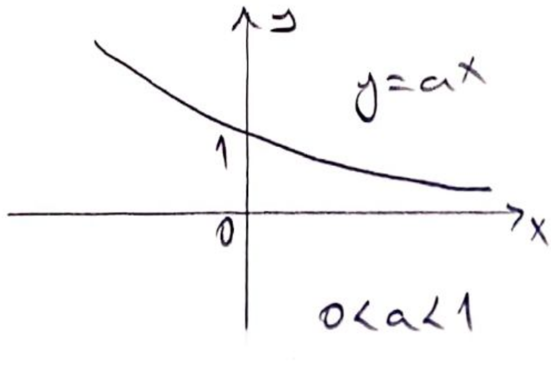
$$\Rightarrow ÇK = \{x\in\mathbb{R} : \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Üstel - Logaritma Fonksiyonları

Tanım: $a\in\mathbb{R}^+$, $a\neq 1$ olmak üzere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a sayısına ise üstel fonksiyonun tabanı denir.



$a>1$



$0<a<1$

Üstel fonksiyonun tanımı ve grafikleri göz önüne alınırsa şu özellikler ifade edilebilir:

1) Üstel fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. O halde, $a^{g(x)}$ şeklindeki bir üstel fonksiyonun tanım kümesi bulunurken; $a\in\mathbb{R}^+$, $a\neq 1$ ve $g(x)\in\mathbb{R}$ durumları incelenmelidir.

Örnek: $f(x) = 2^{\frac{1}{x^2-49}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$\frac{1}{x^2-49} \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2-49 \neq 0 \Rightarrow x \neq \mp 7 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\mp 7\}$

2) Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = a^x > 0$ olur. O halde $-5 \in \mathbb{R}$ için $a^x \neq -5$ olacağından $f(x) = a^x$ fonksiyonu örten değildir.

Uyarı: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanırsa $f(x) = a^x$ örten olur.

3) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow a^{x_1 - x_2} = 1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ birebirdir.

4) $f(x) = a^x$, $a > 1$ için fonksiyonun grafiğine bakılırsa, x değerleri büyüdükçe fonksiyonun aldığı değerler de büyümektedir. O halde, $a > 1$ için üstel fonksiyon artandır. Benzer şekilde $0 < a < 1$ için üstel fonksiyon azalandır.

Örnek: $2^{5x-1} > 2^{x+7}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım:

$a = 2 > 1$ olduğu için üstel fonksiyon artandır.

$\Rightarrow 5x-1 > x+7 \Rightarrow 4x > 8 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow ÇK = (2, \infty)$

Örnek: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

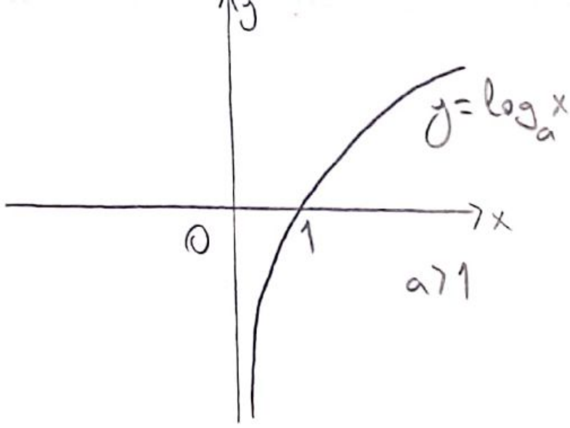
$a = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan üstel fonksiyon azalandır.

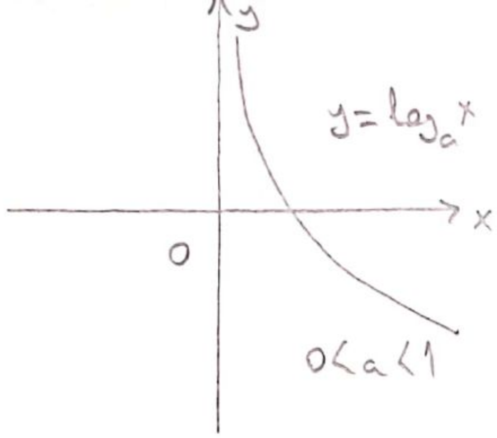
$\Rightarrow 3x+1 < x-5 \Rightarrow 2x < -6 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow ÇK = (-\infty, -3)$

Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan üstel fonksiyonun tersine logaritma fonksiyonu denir.

$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y = \log_a x$ şeklinde tanımlanır.

$\Rightarrow y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.





Logaritma fonksiyonunun özellikleri:

1) Logaritma fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}^+$ dır. O halde $\log_a f(x)$ şeklinde bir fonksiyonun tanım kümesi incelenirken $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ özellikleri incelenmelidir.

Örnek: $f(x) = \log_5 (x^2 - 3x + 2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) > 0 \Rightarrow$

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-3x+2	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow D_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a a = 1$

4) $\log_a a^x = x$, $\quad a^{\log_a x} = x$

5) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

6) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

7) Her $x \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$ için $\log_a x^r = r \log_a x$.

8) Her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (Taban değiştirme özelliği)

$$\Rightarrow (\log_a b) \log_b a = 1 \quad \text{ve} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

9) Logaritmanın tabanı olarak e alınırsa logaritma fonksiyonuna doğal logaritma denir ve $\log_e x$ yerine $\ln x$ gösterimi kullanılır.